

zad. Zaznaczyć zbiór

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^3) < 0\}$$

Niech $z := |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z^3 \stackrel{\text{de Moivre}}{=} |z|^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z^3) = |z|^3 \cdot \sin 3\varphi < 0$$

Rozważmy 2 przypadki:

1. $z=0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z^3) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z^3 = 0$
Sprzeczność.

2. $z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0 \Rightarrow |z|^3 > 0$
 $\Rightarrow (\operatorname{Im}(z^3) < 0) \Rightarrow \sin 3\varphi < 0$

tzn. $3\varphi \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right)$$

Wyjdzie coś a'la

