T: $\forall z \in \mathbb{C} : \arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D-d:

Lemma 1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
(1) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi =: \varphi$
(2) $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

D-d: Niech $\begin{cases} z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), & \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \\ z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{cases}$

Zatem $\arg z_1 = \varphi_1$, $\arg z_2 = \varphi_2$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right]$$

$$= |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Zatem $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ■

Lemma 2. $\forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$:

(1) $\prod_{i=1}^{n} z_i = \left(\prod_{i=1}^{n} |z_i|\right) \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

(2) $\varphi = \arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Dowód indukcyjny z Lemmy 1. ■

Wniosek: (wzór de Moivre'a) $\forall z \in \mathbb{C}$: (1) $z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

(2) $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$

Dowód z lemma 2. $\blacksquare$