Wzór Eulera

$\forall_{x\in\mathbb{R}}:\ e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Zatem $\forall_{x\in\mathbb{R}}:\ \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases} \Big/ + \ \ /{:}2 \qquad \Big/ - \ \ /{:}2i$$

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\[2ex] \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 =$$

$$= \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= -4 \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{2i} =$$

$$= -4 \cdot (\sin 3x - 3\sin x) = -4\sin 3x + 12\sin x$$

~~Weźmy $z \in \mathbb{C}$ takie, że $|z| = 1 \wedge \arg z = \varphi$, gdzie $\arg \varphi$ to argument główny.~~

~~Wzór Eulera: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.~~

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2ix} + 2e^{0} + e^{-2ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \cancel{1}\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \cancel{1}\,\frac{1}{2}$$